

Spis treści

Zamiast wstępu	11
1. Elementy teorii mnogości	13
1.1. Algebra zbiorów	13
1.2. Iloczyny kartezjańskie	15
1.2.1. Potęgi kartezjańskie	16
1.2.2. Relacje	17
1.2.3. Dwa szczególne typy relacji	18
1.3. Zbiór liczb rzeczywistych	19
2. Liczby zespolone	23
2.1. Postać algebraiczna liczb zespolonych	23
2.2. Postać trygonometryczna liczb zespolonych	26
3. Algebra liniowa	30
3.1. Przestrzenie liniowe	30
3.1.1. Przykłady przestrzeni liniowych	33
3.1.2. Podprzestrzenie przestrzeni liniowych	34
3.1.3. Przekształcenia liniowe (homomorfizmy)	36
3.1.4. Przestrzenie liniowe generowane	37
3.1.5. Liniowa zależność i niezależność wektorów w przestrzeni liniowej	38
3.2. Baza i wymiar przestrzeni liniowych	39
3.2.1. Układy wektorów rzędu pełnego	41
3.2.2. Układy wektorów a przekształcenie liniowe	42
3.2.3. Przekształcenia elementarne układów wektorów ...	42

3.3. Zbiory wypukłe i stożki w przestrzeniach liniowych	43
3.4. Przestrzenie euklidesowe	48
3.4.1. Ortogonalność w przestrzeniach euklidesowych . . .	50
3.4.2. Związek między ortogonalnością a liniową niezależ- nością	51
3.5. Przestrzenie metryczne	52
3.5.1. Przykłady metryk w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$	53
3.5.2. Otoczenia punktów i kule w przestrzeniach metrycznych	54
3.6. Przestrzenie unormowane	55
4. Rachunek macierzowy	58
4.1. Rodzaje macierzy	59
4.2. Działania na macierzach	61
4.2.1. Porównywanie macierzy	61
4.2.2. Transponowanie macierzy	61
4.2.3. Mnożenie macierzy przez liczbę	62
4.2.4. Dodawanie macierzy	62
4.2.5. Mnożenie macierzy	63
4.3. Wyznacznik macierzy	67
4.3.1. Obliczanie wyznaczników macierzy	68
4.3.2. Własności wyznaczników	71
4.4. Macierze odwrotne	72
4.4.1. Własności macierzy odwrotnej	74
4.5. Rząd macierzy	74
4.5.1. Związek pomiędzy wyznacznikiem macierzy kwadra- towej a rzędem	75
4.5.2. Obliczanie rzędu macierzy	76
4.6. Uogólnione macierze odwrotne	78
4.6.1. Własności uogólnionych macierzy odwrotnych	79
5. Układy równań liniowych	81
5.1. Układy równań liniowych i ich rozwiązania	81
5.1.1. Twierdzenie Kroneckera – Capellego	83

5.2. Jednorodne układy równań liniowych	84
5.3. Metody rozwiązywania układu równań liniowych	85
5.3.1. Strategie rozwiązywania dowolnych układów równań liniowych	87
5.3.2. Rodzaje rozwiązań układu równań liniowych	91
5.4. Zastosowania uogólnionych macierzy odwrotnych do rozwiązywania układów równań liniowych	92
6. Formy liniowe, dwuliniowe i kwadratowe	95
6.1. Określoność form kwadratowych	98
6.2. Badanie określoności form kwadratowych	100
7. Wektory własne i wartości własne macierzy ...	103
7.1. Własności wektorów własnych i wartości własnych	105
8. Podstawy analizy matematycznej w zakresie funkcji jednej zmiennej	107
8.1. Granice funkcji	107
8.1.1. Granice jednostronne	110
8.1.2. Własności granic funkcji jednej zmiennej	111
8.1.3. Asymptoty wykresów funkcji $y = f(x)$	112
8.2. Ciągłość funkcji	114
8.2.1. Własności funkcji ciągłych	115
8.2.2. Jednostronna ciągłość funkcji	117
9. Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej	119
9.1. Pochodne funkcji	120
9.1.1. Interpretacja geometryczna pierwszej pochodnej ...	121
9.1.2. Podstawowe wzory rachunku różniczkowego	123
9.1.3. Własności pierwszej pochodnej	124
9.1.4. Pochodne jednostronne	125
9.1.5. Pochodne wyższych rzędów	126
9.2. Różniczki funkcji	127

9.2.1. Interpretacja geometryczna różniczki rzędu pierwszego	128
9.2.2. Własności różniczki pierwszego rzędu	129
9.2.3. Różniczki wyższych rzędów	129
9.3. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego	130
9.3.1. Twierdzenia o własnościach funkcji różniczkowalnych	130
9.3.2. Reguła de l'Hospitala	132
9.3.3. Wzór Taylora	133
9.4. Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania przebiegu zmienności funkcji	136
9.4.1. Monotoniczność funkcji	136
9.4.2. Ekstrema funkcji	137
9.4.3. Wypukłość funkcji	140
9.4.4. Punkty przegięcia wykresu funkcji	142
9.5. Niektóre charakterystyki zmienności funkcji	144
10. Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej	146
10.1. Całka nieoznaczona	146
10.1.1. Podstawowe wzory rachunku całkowego dotyczące całek nieoznaczonych	148
10.1.2. Ogólne własności całki nieoznaczonej	149
10.1.3. Metody całkowania funkcji	150
10.2. Całka oznaczona	151
10.2.1. Interpretacja geometryczna sumy Riemanna	153
10.2.2. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej	155
10.2.3. Warunki istnienia całki oznaczonej Riemanna ..	155
10.2.4. Związek całki oznaczonej z funkcją pierwotną i całką nieoznaczoną	157
10.2.5. Podstawowe twierdzenia rachunku całkowego dotyczące całki oznaczonej	157
10.3. Całki niewłaściwe	160
10.4. Całka jako funkcja granicy całkowania	161
10.5. Całka Stieltjesa	162
10.5.1. Własności całki Stieltjesa	164

11. Szeregi	166
11.1. Szeregi liczbowe	166
11.1.1. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach dodatnich	167
11.1.2. Działania na szeregach liczbowych	170
11.1.3. Szeregi liczbowe o wyrazach dowolnych	170
11.1.4. Szeregi naprzemienne	171
11.1.5. Sumy niektórych szeregów liczbowych	172
11.2. Ciągi i szeregi funkcyjne	172
11.2.1. Rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych	173
11.2.2. Szeregi funkcyjne	175
11.2.3. Twierdzenia o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów funkcyjnych	176
11.3. Szeregi potęgowe	178
12. Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych	180
12.1. Funkcje wielu zmiennych	180
12.2. Pochodne funkcji wielu zmiennych	182
12.2.1. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów funkcji wielu zmiennych	186
12.3. Różniczki funkcji wielu zmiennych	191
12.3.1. Zastosowanie różniczek pierwszego rzędu do obliczeń przybliżonych funkcji wielu zmiennych	193
12.3.2. Różniczki wyższych rzędów	194
12.4. Podstawowe twierdzenia rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych	196
12.4.1. Wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych	196
12.4.2. Wypukłość funkcji wielu zmiennych	197
12.5. Ekstrema funkcji wielu zmiennych	198
12.5.1. Ekstrema bezwarunkowe	198
12.5.2. Największa i najmniejsza wartość funkcji wielu zmiennych w zbiorze $A \subset R^n$	201
12.5.3. Ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych	202

12.6. Pochodne kierunkowe funkcji wielu zmiennych	208
12.7. Różniczkowanie funkcji wektorowych wielu zmiennych	209
12.8. Różniczkowanie form liniowych, dwuliniowych i kwadratowych	211

13. Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych

(całki wielokrotne)	213
13.1. Całki podwójne	213
13.1.1. Określenie całki podwójnej	216
13.1.2. Zagadnienie istnienia całki podwójnej	218
13.1.3. Własności całki podwójnej	220
13.1.4. Metody obliczania całek podwójnych	222
13.1.5. Niewłaściwe całki podwójne	223
13.2. Całki potrójne i wielokrotne	223
13.2.1. Metody obliczania całki potrójnej	225
13.2.2. Całki wielokrotne (krotności większej niż 3) ...	226
13.3. Całki wielokrotne jako funkcje granic całkowania	227

14. Równania różniczkowe zwyczajne

14.1. Podstawowe definicje i określenia	229
14.2. Podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych .	233
14.3. Liniowe równania różniczkowe zwyczajne	239
14.4. Układy równań różniczkowych zwyczajnych	243

Literatura

247